LA VALUTAZIONE DEI TITOLI A TASSO VARIABILE

FLAVIO ANGELINI, STEFANO HERZEL

SOMMARIO. Queste note sono state pensate come supporto per i corsi di Matematica Finanziaria da noi tenuti presso l'Università di Perugia. L'obiettivo è quello di descrivere i principali titoli indicizzati, quali titoli a tasso variabile, mutui a tasso variabile e interest rate swap, e di valutarli attraverso il principio di arbitraggio.

1. Introduzione

I titoli obbligazionari indicizzati, anche detti a tasso variabile, hanno assunto un'importanza fondamentale per chiunque voglia operare sul mercato, rappresentando una delle principali fonti di investimento e di finanziamento e raggiungendo volumi di scambio molto elevati.

Il primo obiettivo di queste note è quello di descrivere i principali titoli indicizzati, quali i titoli a tasso variabile, i mutui a tasso variabile e gli Interest Rate Swap. Vogliamo inoltre determinare il valore di un titolo indicizzato nell'istante attuale sulla base del principio di arbitraggio. Il valore di un titolo verrà anche detto valore di mercato o valore di non arbitraggio o valore rispetto alla struttura per scadenza dei tassi di mercato. Nel linguaggio operativo si utilizza anche il termine *mark-to-market*. Da tali considerazioni si deriveranno proprietà importanti delle grandezze in gioco.

Utilizzeremo le usuali ipotesi di mercato perfetto e supporremo la presenza sul mercato di zero coupon bond unitari per tutte le scadenze. Denoteremo uno zero coupon bond con l'acronimo ZCB.

Lo schema generale di valutazione di un titolo tramite il principio di arbitraggio è il seguente:

(1) si determina una strategia autofinanziante che replichi tale titolo. Una strategia replica un titolo se garantisce lo stesso flusso di importi. È autofinanziante se non richiede alcuna immissione di liquidità né determina redditi nelle scadenze future;
(2) si determina il costo iniziale di tale strategia;
(3) per evitare arbitraggi, il prezzo del titolo deve essere uguale al costo della strategia: un qualunque disallineamento tra i due porterebbe ad un arbitraggio. Se, ad esempio, il prezzo del

titolo fosse maggiore del costo della strategia, vendere il titolo e effettuare la strategia produrrebbe un guadagno immediato senza alcun impegno futuro, ovvero un arbitraggio di tipo B.

Per tutto quello che viene dato per assunto si rimanda a Castellani, De Felice e Moriconi (1) o a Consiglio (2). In particolare si presuppone la conoscenza della legge degli interessi semplici e degli interessi composti, dei titoli a tasso fisso, quali zero coupon bond, coupon bond e mutui a tasso fisso, dei Forward Rate Agreement (FRA), delle ipotesi di mercato perfetto, della definizione di arbitraggio e della valutazione di flussi finanziari noti.

L'istante attuale di valutazione verrà denotato con t. Il prezzo in t di uno ZCB unitario con scadenza s verrà indicato con $v(t,s)$ e il relativo tasso con $i(t,s)$. Per comodità del lettore, ricordiamo il seguente

Risultato 1.0.1. *(Teorema della linearità del prezzo) Sia X un flusso finanziario costituito da importi futuri $\{x_1,\ldots,x_n\}$, noti in t, sullo scadenzario $\{t_1,\ldots,t_n\}$, $t \leq t_1 < \ldots < t_n$. Il valore di non arbitraggio $V(t,X)$ in t di X è:*

$$V(t,X) = \sum_{k=1}^{n} x_k v(t,t_k).$$

Si ricorda che la dimostrazione utilizza il principio di non arbitraggio: in t si costruisce, come indicato nello schema sopra, un portafoglio, composto da x_k quote dello ZCB unitario con scadenza t_k, per $k = 1,\ldots,n$. Tale portafoglio replica il flusso garantito da X. Il prezzo del portafoglio è $\sum_{k=1}^{n} x_k v(t,t_k)$. In tal caso nelle date future non è necessario intraprendere alcuna azione e si dice che si effettua una *strategia statica*.

2. Titoli indicizzati

I titoli indicizzati sono caratterizzati da un flusso di importi il cui valore non è noto al momento della stipula del contratto e verrà determinato in date future stabilite. Tali importi variabili, anche detti aleatori, sono determinati da un tasso di mercato che viene specificato nel contratto. Il tasso può essere il tasso Euribor, il tasso Libor, il rendimento di un BOT, ecc.. Tra i principali titoli indicizzati citiamo:

(1) coupon bond indicizzati o a tasso variabile o *Floating Rate Notes* (FRN);
(2) mutui indicizzati o a tasso variabile (MTV);
(3) *Interest Rate Swap* (IRS).

2.1. **Floating Zero Coupon Bond.** Siano T e s due date future, con $t < T < s$. Un floating zero coupon bond (FZCB) è un titolo che paga un importo, detto *payoff*, $\mathcal{X}_s$ in s, non noto in t, che viene determinato in T applicando il tasso d'interesse di mercato $i(T, s)$, vigente nell'istante futuro T e con scadenza in s, a un capitale unitario. Si ha

$$\mathcal{X}_s = \frac{1}{v(T, s)} = (1 + i(T, s)(s - T)).$$

Il fattore di sconto $v(T, s)$ non è noto all'istante di valutazione, e sarà noto solo in T. Si dice che tale titolo paga un importo aleatorio. Vogliamo determinare il valore di non arbitraggio di tale titolo, che indichiamo con $V(t, \mathcal{X}_s)$.

Utilizzando il principio di arbitraggio, siamo in grado di dimostrare il seguente

Risultato 2.1.1. $V(t, \mathcal{X}_s) = v(t, T)$.

La dimostrazione consiste nel costruire una strategia che replichi il payoff in s del FZCB. Per il principio di arbitraggio il costo di tale strategia deve essere uguale al prezzo del FZCB. La strategia è la seguente:

(1) in t si acquista uno ZCB unitario con scadenza in T;
(2) in T si investe l'importo unitario garantito dall'operazione (1) al tasso di mercato $i(T, s)$, ovvero si acquistano $1/v(T, s)$ ZCB unitari con scadenza in s;

In s la strategia garantisce l'importo $1/v(T, s)$, esattamente come il FZCB. La strategia si autofinanzia in T, ovvero non ha costi né guadagni. Il suo costo in t è $v(t, T)$. Pertanto il prezzo del FZCB deve essere $v(t, T)$.

Per convincersi ulteriormente di questo fatto, costruiamo un arbitraggio nel caso il prezzo del FZCB non sia il costo della strategia. Supponiamo ad esempio che

$$V(t, \mathcal{X}_s) > v(t, T).$$

Dato che il prezzo del FZCB è maggiore del prezzo giusto, decidiamo di venderlo. Chiamiamo tale operazione azione (3). A questo punto possiamo investire il denaro incassato nella strategia replicante e autofinanziante composta dalle operazioni (1) e (2) sopra descritte. Il risultato di tali operazioni è mostrato nella seguente tabella:

	t	T	s
(1)	$-v(t,T)$	1	0
(2)	0	-1	$1/v(T,s)$
(3)	$V(t,\mathcal{X}_s)$	0	$-1/v(T,s)$
	$V(t,\mathcal{X}_s) - v(t,T) > 0$	0	0

Abbiamo così costruito un arbitraggio, in particolare un arbitraggio di tipo B. In maniera simmetrica si dimostra il caso opposto. □

Il risultato (2.1.1) è cruciale. Tutti i risultati che seguono si possono ottenere come sua conseguenza.

Osservazione 2.1.2. *Per valutare un FZCB, il risultato (1.0.1) non si può applicare per concludere che*

$$V(t,\mathcal{X}_s) = \mathcal{X}_s v(t,s) = v(t,s)/v(T,s). \tag{1}$$

Innanzitutto il risultato non è soddisfacente dato che $v(T,s)$ non è conosciuto in t, mentre noi vogliamo determinare un ben preciso prezzo da pagare in t. Del resto, se provassimo a seguire la linea della dimostrazione di (1.0.1), ovvero a costruire un portafoglio composto da ZCB unitari che replichi $\mathcal{X}_s$, dovremmo comprare in t $1/v(T,s)$ quote dello ZCB unitario con scadenza in s, numero di quote che appunto non conosciamo.

Chi conosce la proprietà di scindibilità potrebbe tentare di argomentare che, in base a tale proprietà,

$$v(t,s)/v(T,s) = v(t,T),$$

e tale valore è noto in t. A parte il modo ingiustificato in cui la relazione (1) è stata ottenuta, la proprietà di scindibilità è difficilmente verificata sul mercato. Un modo per assicurarsi che questa sia verificata sul mercato è quello di ipotizzare che i tassi futuri siano conosciuti in t (Teorema dei prezzi certi, si veda (2) §4.3), ipotesi difficilmente difendibile data la forte incertezza dei tassi futuri.

Concludendo, la linea di dimostrazione qui tracciata è errata. La dimostrazione è quella esposta nel risultato (2.1.1).

2.2. **Cedole indicizzate.** Come secondo passo, ci interessa ora la valutazione di una cedola indicizzata. Una cedola indicizzata $\mathcal{I}_s$, determinata in T e da pagare in s, calcolata su un capitale o valore nozionale C, è definita come

$$\mathcal{I}_s = Ci(T,s)(s-T).$$

Si noti che il tasso utilizzato è un tasso semplice, essendo gli orizzonti temporali considerati solitamente brevi (tre e sei mesi o un anno) e i tassi di riferimento dei tassi a breve, quali l'Euribor, il Libor o il rendimento di uno ZCB a breve. Il suo valore di mercato in t $V(t, \mathcal{I}_s)$ è dato dal seguente

Risultato 2.2.1. $V(t, \mathcal{I}_s) = C(v(t,T) - v(t,s))$.

Per verificare tale risultato, basta scrivere la cedola indicizzata in termini di prezzi di ZCB:

$$\mathcal{I}_s = C \frac{\left(\frac{1}{v(T,s)} - 1\right)}{s-T}(s-T) = C\left(\frac{1}{v(T,s)} - 1\right).$$

Così

$$\begin{aligned} V(t, \mathcal{I}_s) &= V\left(t, \frac{C}{v(T,s)} - C\right) \\ &= CV\left(t, \frac{1}{v(T,s)}\right) - Cv(t,s). \qquad (2) \end{aligned}$$

Si osservi che la seconda uguaglianza di (2) è anch'essa una relazione di non arbitraggio. Infatti una cedola indicizzata è replicabile con un portafoglio composto dall'acquisto in t di C FZCB, determinati in T e con scadenza s, e dalla vendita in t di C ZCB unitari con scadenza in s. Dunque il suo valore deve essere dato dal valore di tale portafoglio, cioè dalla differenza dei rispettivi valori. Il termine $V(t, 1/v(T,s))$ rappresenta il valore in t del FZCB, determinato in T con scadenza in s. Per il risultato (2.1.1), si ha

$$V(t, \mathcal{I}_s) = C(v(t,T) - v(t,s)). \qquad \square$$

Osservazione 2.2.2. *Lo schema percorso per dimostrare il risultato (2.2.1) attraverso (2.1.1) ci è sembrato quello più chiaro dal punto di vista didattico. Naturalmente si può dimostrare il risultato (2.2.1) senza ricorrere al (2.1.1). Infatti si può osservare che la cedola indicizzata viene replicata con C quote della strategia mostrata nei punti (1) e (2) della dimostrazione di (2.1.1), più la vendita in t di C ZCB unitari con scadenza in s. Il costo di tale strategia è proprio $C(v(t,T) - v(t,s))$. In caso di disallineamento tra il prezzo della cedola indicizzata e il costo della strategia ci sarebbe la possibilità di costruire un arbitraggio (per dettagli si veda (2), §2.2, pag. 80).*

2.3. **Tasso a termine rivisitato.** Il Teorema dei prezzi impliciti, che stabilisce una relazione tra prezzi a termine e prezzi a pronti, può essere rivisto alla luce delle argomentazioni qui svolte. Tale relazione è $v(t, T, s) = v(t, s)/v(t, T)$, dove $v(t, T, s)$ è il prezzo a termine in T, pattuito in t, di uno ZCB unitario con scadenza s. Anche questa relazione è stata ottenuta tramite il principio di arbitraggio (si veda (1) o (2)). Si ricorda che il costo per entrare in un FRA è nullo. Indichiamo con $FRA = FRA_{T \times s}$ il tasso a termine. Prezzo e tasso sono legati da

$$v(t, T, s) = (1 + FRA(s - T))^{-1}. \tag{3}$$

Il payoff del contratto, da liquidarsi in T, è

$$\Lambda(T, s) = C[i(T, s) - FRA](s - T)v(T, s).$$

Converrà qui pensare di liquidare il FRA in s, in analogia con il pagamento di una cedola indicizzata. Il payoff in s sarà dunque dato da

$$\Lambda(T, s) = C[i(T, s) - FRA](s - T). \tag{4}$$

Lo scopo in questo caso non è la valutazione del FRA in t, dato che ha valore nullo. Lo scopo è quello di determinare il tasso FRA. In altre parole di ritrovare il Teorema dei prezzi impliciti. Per far ciò si può determinare il valore $V(t, \Lambda(T, s))$ del contratto in t e, dal fatto che tale valore è zero, trarre delle conclusioni sul tasso FRA. Il contratto si può replicare con un portafoglio composto da una posizione lunga sulla cedola indicizzata e una posizione corta su una cedola fissa. Ovvero acquistando la cedola indicizzata e vendendo la cedola fissa calcolata al tasso FRA. Si ha dunque

$$V(t, \Lambda(T, s)) = V(t, Ci(T, s)(s - T)) - V(t, CFRA(s - T)).$$

Il primo termine della differenza è, per il risultato (2.2.1), $C(v(t, T) - v(t, s))$. Il secondo termine ha valore $CFRA(s - T)v(t, s)$. Dato che $V(t, \Lambda(T, s)) = 0$, otteniamo

$$C(v(t, T) - v(t, s)) = CFRA(s - T)v(t, s).$$

Così

$$FRA = \frac{v(t, T) - v(t, s)}{v(t, s)(s - T)}.$$

Ricordando (3), ciò è equivalente a dire che

$$v(t, T, s) = v(t, s)/v(t, T).$$

2.4. **Coupon bond indicizzati.** Lo schema di un coupon bond indicizzato o Floating Rate Note (FRN) è analogo a quello di un coupon bond a tasso fisso. La differenza consiste nel fatto che le cedole sono indicizzate ad un tasso di mercato e non sono note in t. Nel seguito $t_k = t_0 + k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ indicherà lo scadenzario, dove τ è un intervallo temporale fissato. Tale intervallo è solitamente pari a sei mesi. Non ci preoccuperemo in queste note del calcolo dei giorni tra le scadenze, né delle convenzioni per misurare il tempo. Ad esempio nel caso l'intervallo temporale sia un semestre, porremo $\tau = 0.5$ anni, anziché utilizzare convenzioni precise come Act/360 o Act/365. Tali convenzioni hanno nondimeno una certa rilevanza nei casi concreti. Sia C il valore facciale o nozionale del titolo. Un titolo indicizzato al tasso di mercato $i(t, t+\tau)$, specificato nel contratto, è caratterizzato da un flusso di cedole indicizzate, ognuna delle quali determinata nell'istante futuro t_{k-1} e pagata nell'istante successivo t_k, più il rimborso del capitale alla scadenza t_n. In dettaglio, sullo scadenzario $\{t_1, \ldots, t_n\}$ il flusso $\{X_1, \ldots, X_n\}$ di un FRN è il seguente:

$$
\begin{array}{lcl}
X_1 & = & \mathcal{I}_1 = Ci(t_0, t_1)\tau \quad \text{in} \quad t_1 \\
X_2 & = & \mathcal{I}_2 = Ci(t_1, t_2)\tau \quad \text{in} \quad t_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
X_n & = & \mathcal{I}_n + C = Ci(t_{n-1}, t_n)\tau + C \quad \text{in} \quad t_n
\end{array}
$$

Si osservi che, se $t_0 \leq t < t_1$, la prima cedola $\mathcal{I}_1$ è nota in t e possiamo indicarla con I_1. In tal caso I_1 si dice *cedola in corso.*

Risultato 2.4.1. *Il valore in t $V(t, \mathcal{X})$ del flusso di un titolo indicizzato $\mathcal{X}$ che paga cedole $\mathcal{I}_k$, per $k = 1, 2, \ldots, n$ e rimborsa il capitale C a scadenza è*

(1) $V(t, \mathcal{X}) = Cv(t, t_0)$ *se* $t < t_0$*;*
(2) $V(t, \mathcal{X}) = (C + I_1)v(t, t_1)$ *se* $t_0 < t < t_1$*;*
(3) $V(t, \mathcal{X}) = C$ *se* $t = t_0$*.*

Per il punto (1): se $t < t_0$, la prima cedola non è nota. Per prima cosa si ha

$$V(t, \mathcal{X}) = V(t, \mathcal{I}_1) + V(t, \mathcal{I}_2) + \ldots + V(t, \mathcal{I}_n) + V(t, C),$$

dato che il flusso $\mathcal{X}$ è replicabile da un portafoglio, costruito in t, composto dalle singole cedole indicizzate e da uno ZCB con valore facciale C e scadenza in t_n. Così, per (2.2.1),

$$
\begin{array}{rcl}
V(t, \mathcal{X}) & = & C(v(t, t_0) - v(t, t_1)) + C(v(t, t_1) - v(t, t_2)) + \ldots + \\
& + & C(v(t, t_{n-1}) - v(t, t_n)) + Cv(t, t_n) = \\
& = & C(v(t, t_0) - v(t, t_1) + v(t, t_1) - v(t, t_2) + \ldots + \\
& + & v(t, t_{n-1}) - v(t, t_n) + v(t, t_n)) = \\
& = & Cv(t, t_0).
\end{array}
$$

Nel caso che $t_0 < t < t_1$, la prima cedola è nota, pari a $I_1 = Ci(t_0, t_1)\tau$, e il suo valore attuale è $I_1 v(t, t_1)$. Il valore del flusso rimanente si ottiene dalle considerazioni precedenti ed è pertanto $Cv(t, t_1)$. Sommando si ottiene il punto (2).

Quando $t = t_0$, la prima cedola è stata appena determinata e il valore del titolo diventa

$$C(v(t_0, t_1) + i(t_0, t_1)\tau v(t_0, t_1)) = C(1 + i(t_0, t_1)\tau)v(t_0, t_1) = C. \quad \square$$

Osservazione 2.4.2. *Si osservi che l'istante t_0 non deve essere necessariamente l'istante di emissione. Il risultato* 2.4.1 *rimane valido nel caso t_0 sia una data di stacco cedola.*

Osservazione 2.4.3. *(Dimostrazione diretta di (2.4.1)) Come il risultato (2.2.1), il punto (1) del risultato (2.4.1) può essere dimostrato direttamente costruendo una strategia autofinanziante che replica il flusso del titolo indicizzato. La strategia consiste in:*

1 *acquisto in t di uno ZCB con valore facciale C e scadenza t_0;*
2 *investimento in t_0 del capitale C nello ZCB che scade in t_1;*
3 *investimento in t_1 del capitale C nello ZCB che scade in t_2;*
$\vdots$
n *investimento in t_{n-2} del capitale C nello ZCB che scade in t_{n-1};*
n+1 *investimento in t_{n-1} del capitale C nello ZCB che scade in t_n;*

La strategia è mostrata nella seguente tabella. Nell'ultima riga è mostrato il flusso di cassa corrispondente.

	t	t_0	t_1	t_2	$\dots$	t_{n-1}	t_n
(1)	$-Cv(t, t_0)$	C	*0*	*0*	$\dots$	*0*	*0*
(2)	*0*	$-C$	$C/v(t_0, t_1)$	*0*	$\dots$	*0*	*0*
(3)	*0*	*0*	$-C$	$C/v(t_1, t_2)$	$\dots$	*0*	*0*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
(n)	*0*	*0*	*0*	*0*	$\dots$	$C/v(t_{n-2}, t_{n-1})$	*0*
(n+1)	*0*	*0*	*0*	*0*	$\dots$	$-C$	$C/v(t_{n-1}, t_n)$
	$-Cv(t, t_0)$	*0*	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{I}_2$	$\dots$	$\mathcal{I}_{n-1}$	$C + \mathcal{I}_n$

Come si vede, il flusso generato da tale strategia è esattamente quello del coupon bond indicizzato. Il costo della strategia è $Cv(t, t_0)$. Se ne conclude che, per evitare arbitraggi, il costo del coupon bond $V(t, \mathcal{X})$ deve essere pari a quello della strategia, cioè il contenuto del punto (1) del (2.4.1).

Il punto (3) del risultato (2.4.1) dice che, all'emissione o al momento dello stacco della cedola, il titolo indicizzato quota alla pari. Questo fatto costituisce una proprietà importante dei titoli a tasso variabile. Nel complesso il risultato (2.4.1) dice che il valore di un titolo indicizzato dipende solo dal valore facciale e, eventualmente, dalla cedola in corso. In altre parole il valore del FRN non risente sensibilmente del rischio legato alle variazioni di tasso. Ne risente solo nel periodo tra lo stacco delle cedole; a stacco cedola torna alla parità. L'interpretazione di ciò risiede nel fatto che il reddito che produce il FRN dipende dai tassi futuri. Nel caso dei titoli a tasso fisso, se si verifica un innalzamento della curva dei tassi, il valore attuale delle cedole future si abbassa. Di conseguenza si abbassa il valore di mercato del titolo. Viceversa, se si verifica un abbassamento della curva dei tassi, il titolo acquista valore. Il FRN non è influenzato da tali variazioni in quanto le cedole si adegueranno alle variazioni dei tassi.

Solitamente ai titoli indicizzati si aggiunge uno *spread* σ, espresso su base annua, che rappresenta un tasso nominale aggiuntivo. Lo spread viene generalmente espresso in punti base (*basis point*); un punto base corrisponde a 10^{-4}, cosicché 100 punti base corrispondono ad un punto percentuale 1%, 10 punti base corrispondono a 0.1%, ecc.. Le cedole indicizzate vengono tutte aumentate di un importo, fisso e noto in t, pari a $C\sigma\tau$. Indichiamo con X^σ il flusso costituito da tali importi. Il titolo non quoterà più alla pari. Il valore del titolo con l'aggiunta dello spread $\mathcal{X}^\sigma$ è la somma della parte indicizzata $\mathcal{X}$ e della parte fissa X^σ. Pertanto:

$$\begin{aligned} V(t,\mathcal{X}^\sigma) &= V(t,\mathcal{X}) + V(t,X^\sigma) \\ &= V(t,\mathcal{X}) + C\sigma\tau\sum_{k=1}^{n} B(t,t_k). \end{aligned}$$

Il valore $V(t,\mathcal{X})$ si determina in base al risultato (2.4.1) a seconda dei casi.

I titoli del debito pubblico italiano a tasso variabile sono i Certificati di Credito del Tesoro (CCT); questi sono indicizzati al rendimento del BOT a sei mesi, a cui viene aggiunto uno spread. Ad esempio, nel caso di un CCT semestrale che paga le cedole il 01/08 e il 01/02, la cedola relativa al semestre 01/08-31/01 e pagata il 01/02 si determina in base al rendimento del BOT a sei mesi rilevato nell'asta di fine luglio.

2.5. **Mutui indicizzati.** I mutui indicizzati o cosidetti a tasso variabile sono caratterizzati da rate in cui la quota interessi è indicizzata ad un tasso di riferimento. Un mutuo indicizzato si può definire attraverso uno schema simile ai titoli indicizzati. Consideriamo l'istante di emissione $t = t_0$ e lo scadenzario $t_k = t_0 + k\tau$, $k = 1, 2, \ldots, n$, che individua le date di pagamento delle rate. Come si vede ci si riferisce a pagamenti posticipati. L'intervallo di tempo τ è determinato dalla periodicità di pagamento delle rate. Nell'istante t è nota la successione delle quote capitali C_k, per $k = 1, \ldots, n$, e dei debiti residui D_k, per $k = 0, 1, \ldots, n$. Vale la relazione $C_k = D_{k-1} - D_k$ e deve essere soddisfatta la condizione di chiusura $\sum_{k=1}^{n} C_k = D_0$, ovvero $D_n = 0$. Una possibilità è quella di un piano a quote capitali costanti.

La quota interessi $\mathcal{I}_k$, pagata in t_k, viene determinata in t_{k-1} come

$$\mathcal{I}_k = D_{k-1} i(t_{k-1}, t_k)\tau,$$

per ogni $k = 1, \ldots, n$. Si noti che la prima quota interessi $\mathcal{I}_1 = I_1 = D_0 i(t_0, t_1)\tau$ è nota in $t = t_0$. La rata che verrà pagata ad ogni data sarà

$$\mathcal{R}_k = C_k + \mathcal{I}_k,$$

per $k = 1, 2, \ldots, n$. Il valore di un mutuo indicizzato $\mathcal{M}$ è dato dal seguente

Risultato 2.5.1. *Un mutuo indicizzato, al momento della stipula $t = t_0$ quota alla pari, cioè $V(t, \mathcal{M}) = D_0$.*

Si ha:

$$\begin{aligned}
V(t, \mathcal{M}) &= \sum_{k=1}^{n} V(t, \mathcal{R}_k) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} V(t, C_k) + \sum_{k=1}^{n} V(t, \mathcal{I}_k) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_k v(t, t_k) + V(t, I_1) + \sum_{k=2}^{n} V(t, \mathcal{I}_k) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_k v(t, t_k) + I_1 v(t, t_1) + \sum_{k=2}^{n} D_{k-1}(v(t, t_{k-1}) - v(t, t_k)).
\end{aligned}$$

Per l'ultima uguaglianza si è utilizzata la valutazione della cedola indicizzata $\mathcal{I}_k$ tramite (2.2.1). Sviluppando si ha

$$\begin{aligned}
V(t, \mathcal{M}) &= C_1 v(t, t_1) + I_1 v(t, t_1) + D_1 v(t, t_1) + \\
&+ C_2 v(t, t_2) - D_1 v(t, t_2) + D_2 v(t, t_2) + \\
&+ C_3 v(t, t_3) - D_2 v(t, t_3) + D_3 v(t, t_3) + \\
&+ \ldots + \\
&+ C_{n-1} v(t, t_{n-1}) - D_{n-2} v(t, t_{n-1}) + D_{n-1} v(t, t_{n-1}) + \\
&+ C_n v(t, t_n) - D_{n-1} v(t, t_n) + D_n v(t, t_n).
\end{aligned}$$

Raccogliendo i termini con lo stesso fattore di sconto si ha

$$\begin{aligned} V(t,\mathcal{M}) &= (C_1 + I_1 + D_1)v(t,t_1) + \\ &+ [C_2 - (D_1 - D_2)]v(t,t_2) + \\ &+ [C_3 - (D_2 - D_3)]v(t,t_3) + \\ &+ \ldots + \\ &+ [C_{n-1} - (D_{n-2} - D_{n-1})]v(t,t_{n-1}) + \\ &+ [C_n - (D_{n-1} - D_n)]v(t,t_n). \end{aligned}$$

Ricordando che $C_k = D_{k-1} - D_k$ e che $D_n = 0$, i termini della somma si annullano tutti, tranne il primo. Si ottiene

$$\begin{aligned} V(t,\mathcal{M}) &= (C_1 + I_1 + D_1)v(t,t_1) = \\ &= (D_0 + I_1)v(t,t_1) = (D_0 + D_0 i(t,t_1)\tau)v(t,t_1) = \\ &= D_0(1 + i(t,t_1)\tau)v(t,t_1) = D_0. \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione 2.5.2. *Il risultato (2.5.1) resta valido ad ogni istante di pagamento della rata, ovvero $V(t_k,\mathcal{M}) = D_k$, per ogni $k = 0, 1, \ldots, n$. Cioè, ad ogni pagamento della rata, il valore di mercato del mutuo indicizzato, ovvero il valore delle rate future, calcolato rispetto alla struttura dei tassi vigenti, è uguale al debito residuo. Ciò non è vero, in generale, nel caso di mutui a tasso fisso.*

Sul mercato i MTV vengono proposti con uno spread aggiuntivo, che varia a seconda dell'istituto di credito e che dipende da vari fattori tra cui l'affidabilità del sottoscrittore. Le quote interesse vengono aumentate di un importo $D_{k-1}\sigma\tau$ per $k = 1, 2, \ldots, n$, la cui successione verrà indicata con M^σ. Per valutare in $t = t_0$ un MTV con spread $\mathcal{M}^\sigma$ rispetto alla struttura dei tassi corrente si sommano i valori della parte variabile $\mathcal{M}$ e di quella fissa M^σ:

$$\begin{aligned} V(t,\mathcal{M}^\sigma) &= V(t,\mathcal{M}) + V(t,M^\sigma) = \\ &= D_0 + \sigma\tau \sum_{k=1}^{n} D_{k-1}v(t,t_k) \end{aligned}$$

Nel mercato italiano nel 2004 i mutui sono generalmente indicizzati al tasso Euribor e hanno spread che varia mediamente tra l'1% e il 3% (Fonte: Sole 24 Ore (3)). La scadenza del tasso corrisponde alla periodicità delle rate. Per mutui a rate mensili si guarderà all'Euribor a un mese, per rate semestrali all'Euribor a sei mesi e così via.

Si osservi che, nel caso di un mutuo con rimborso unico, ovvero nel quale $C_k = 0$, per $k = 1, \ldots, n-1$, e $C_n = D_0$, si ottiene un titolo indicizzato descritto in (2.4).

Osservazione 2.5.3. *La denominazione a tasso variabile potrebbe creare confusione. In realtà il punto fondamentale non è che il tasso sia variabile, bensì che non sia noto al momento dell'emissione. Infatti si può sempre pensare di costruire un piano d'ammortamento con tassi variabili, ovvero che variano lungo la durata del mutuo, ma che sono determinati all'istante dell'emissione. Ad esempio si potrebbe decidere di costruire un piano a quote capitali costanti la cui somma estingue il debito, e determinare un tasso per la prima parte di rate e un'altro per la seconda parte. Se i tassi sono stabiliti al momento della stipula del contratto, i relativi mutui non rientrano nella categoria qui trattata. Un altro modo potrebbe essere quello di costruire un piano per le quote capitali, ad esempio costanti, e di utilizzare come tassi per la determinazione della quota interessi i tassi a termine presenti sul mercato al momento della stipula. Si può vedere come un mutuo costruito in questo modo abbia valore di mercato pari al capitale prestato, quoti cioè alla pari come quello indicizzato. Infatti, se* $i(t, t_{k-1}, t_k)$ *denota il tasso a termine all'istante* $t = t_0$ *per l'orizzonte* $[t_{k-1}, t_k]$, *la quota interessi risulta*

$$I_k = D_{k-1} i(t, t_{k-1}, t_k)\tau,$$

per $k = 1, 2, \ldots, n$, *ed è nota in* t. *Il valore* $V(t)$ *di tale mutuo è dato da (1.0.1):*

$$\begin{aligned} V(t) &= \sum_{k=1}^{n} V(t, R_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} V(t, C_k) + \sum_{k=1}^{n} V(t, I_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_k v(t, t_k) + \sum_{k=1}^{n} D_{k-1} i(t, t_{k-1}, t_k)\tau v(t, t_k) \end{aligned}$$

Ricordando che

$$i(t, t_{k-1}, t_k) = \frac{v(t, t_{k-1}) - v(t, t_k)}{v(t, t_k)\tau},$$

si ha

$$
\begin{aligned}
V(t) &= \sum_{k=1}^{n} C_k v(t,t_k) + \sum_{k=1}^{n} D_{k-1}(v(t,t_{k-1}) - v(t,t_k)) = \\
&= D_0 v(t,t) + \\
&+ (C_1 - (D_0 - D_1)v(t,t_1) + \\
&+ (C_2 - (D_1 - D_2)v(t,t_2) + \\
&+ \ldots + \\
&+ (C_{n-1} - (D_{n-2} - D_{n-1})v(t,t_{n-1}) + \\
&+ (C_n - D_{n-1})v(t,t_n) = \\
&= D_0
\end{aligned}
$$

2.6. **Interest rate swap.** In generale, un contratto swap rappresenta un accordo tra due controparti per scambiare (*to swap*) flussi finanziari futuri in accordo a una regola o formula prestabilita. Tale formula dipende dal valore di una o più variabili. Da questa definizione generica si capisce che esistono diverse tipologie di contratti swap. I più utilizzati sono gli *interest rate swap*. Tra gli altri citiamo i *currency swap* o i *commodity swap*. In queste note ci occuperemo delle tipologie più comuni di interest rate swap (IRS). In particolare, ci occuperemo di contratti che impegnano le due controparti a scambiare per un certo numero di anni un flusso a tasso fisso - la gamba fissa del contratto - con un flusso a tasso variabile con stesso scadenzario - la gamba variabile del contratto. Un contratto così fatto è comunemente usato per convertire un investimento a tasso fisso in uno a tasso variabile o viceversa, o cambiare un indebitamento a tasso fisso in uno a tasso variabile o viceversa.

Il tipo più comune di contratto swap è l'IRS semplice. Nel contratto IRS semplice o *plain vanilla* i flussi a tasso fisso e a tasso variabile sono riferiti ad uno stesso valore facciale fissato. Ne diamo una definizione dettagliata.

Definizione 2.6.1. *Interest rate swap semplice*
Nel contratto vengono specificati:

- *Il capitale C su cui calcolare gli interessi, detto anche nozionale o principale;*
- *la data del primo fixing t_0 (inizio del contratto);*
- *la durata o, in modo equivalente, la data di scadenza del contratto;*
- *la periodicità degli scambi τ; le date degli scambi $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ sono dunque definite da $t_k = t_{k-1} + \tau$, per $k = 1, 2, \ldots, n$;*

- *il tasso nominale annuo fisso r;*
- *il tasso di riferimento $i(t, t+\tau)$ dell'indicizzazione.*

Nel contratto si può entrare come colui che paga la gamba fissa (detto payer*) o come colui che la riceve (*receiver*) e paga la gamba variabile. Sullo scadenzario $\{t_1, \dots t_n\}$, il payer riceve il flusso $\{X_1, \dots, X_n\}$, dove*

$$X_k = C[i(t_{k-1}, t_k) - r](t_k - t_{k-1}) = C[i(t_{k-1}, t_k) - r]\tau. \tag{5}$$

Viene dunque scambiato il differenziale tra parte fissa e parte variabile. L'importo si può considerare con il segno: nel caso sia positivo si riceve, altrimenti si paga tale differenziale. Per il receiver, la (5) si deve considerare con il segno opposto. Nel contratto swap può essere inserito uno spread σ da aggiungere al tasso variabile. In tal caso la (5) diventa

$$X_k = C[i(t_{k-1}, t_k) + \sigma - r]\tau. \tag{6}$$

La periodicità più comune per questi contratti è pari a sei mesi. La convenzione per la misurazione del tempo che intercorre tra due date di scambio viene stabilita nel contratto, ad esempio calcolando i giorni effettivi che intercorrono tra le due date e dividendo per 360 o 365, a seconda della convenzione utilizzata per il tasso. Qui supporremo per semplicità che τ sia una quantità fissa espressa in anni, ad esempio $\tau = 0.5$. Di conseguenza i tassi sono espressi su base annua. Il tasso di riferimento dell'indicizzazione più comune per contratti del mercato europeo è l'EURIBOR, mentre per il mercato internazionale è il LIBOR. Altri tipi di tassi possono essere comunque utilizzati, come il tasso dei titoli del Tesoro di uno Stato.

I contratti swap più trattati sul mercato europeo sono contratti (detti EURIRS) per tutte le scadenze annuali da 1 a 12 anni e per le scadenze 15, 20, 25 e 30 anni. Tali contratti hanno periodicità semestrale e tasso di indicizzazione il tasso EURIBOR a sei mesi. Entrare in uno di questi contratti avviene a costo nullo, come nei contratti a termine. Il mercato non quota dunque i contratti, bensì i relativi tassi fissi, i quali vengono detti *tassi swap*. L'insieme dei tassi swap, cioé la struttura per scadenza dei tassi swap, è un oggetto di riferimento per il mercato dei tassi d'interesse, come vedremo in seguito. Il tasso swap relativo a un contratto con scadenza 1 anno e periodicità semestrale, detto tasso swap a 1 anno, viene solitamente indicato con 1Y/6M e così via. Per una struttura per scadenza dei tassi swap si può vedere il foglio *curvatassi.xls* disponibile su (2) o l'Esempio 11.2.2 di (2).

Si consideri come esempio di utilizzo del contratto IRS semplice sopra descritto il caso di un investitore che abbia investito in un coupon bond a tasso fisso, a periodicità semestrale, valore facciale C e tasso nominale annuo r. Supponiamo che l'investitore sia interessato a passare a un investimento a tasso variabile di uguale durata. Il titolo gli garantisce il pagamento di cedole pari a $Cr\tau = C\frac{r}{2}$ a ogni data t_k, mentre vorrebbe ricevere $C\frac{i(t_{k-1},t_k)}{2}$, dove $i(t_{k-1}, t_k)$ è il futuro tasso di mercato in t_{k-1} con scadenza t_k. L'investitore può certamente vendere il suo titolo e acquistarne uno a tasso variabile. Nella pratica in tal modo deve però affrontare i costi della transazione. Alternativamente può accordarsi con una controparte per scambiare le cedole che riceverà con le cedole indicizzate al tasso di mercato. Si accorda dunque con la controparte[1] che, ad ogni stacco della cedola, vengano eseguite le seguenti operazioni:

(1) l'investitore paga alla controparte la cedola che riceve

$$C\frac{r}{2};$$

(2) l'investitore riceve dalla controparte la cedola indicizzata

$$C\frac{i(t_{k-1}, t_k)}{2}.$$

Chiaramente basterà che le controparti si scambino la differenza

$$\frac{C}{2}[i(t_{k-1}, t_k) - r],$$

cioè il flusso definito in (5). Se tale differenza è positiva, ovvero se i tassi si sono alzati rispetto a r, l'investitore si gioverà dello scambio e riceverà denaro, altrimenti pagherà. Il risultato dello scambio è evidentemente quello voluto: l'investitore riceve interessi variabili e ha cambiato l'investimento al tasso fisso r con uno al tasso variabile $i(t, t + \tau)$.

Nel caso invece che il payer di fisso sia indebitato a tasso variabile, ad ogni data t_k deve pagare

$$Ci(t_{k-1}, t_k)\tau.$$

Il contratto swap lo impegna a scambiare la somma in (5). Il risultato è di passare dal debito a tasso variabile a un debito al tasso fisso r.

Viceversa, nel caso che chi riceve il fisso abbia un investimento (un finanziamento) a tasso variabile (tasso fisso), trasformerebbe l'investimento (il finanziamento) in uno a tasso fisso (a tasso variabile).

Un esempio tipico di utilizzo di un contratto swap è quello di un individuo o azienda che ha necessità di un finanziamento. Può facilmente accadere che riesca a ottenere condizioni migliori con un tipo di finanziamento (ad esempio a tasso fisso), mentre per varie ragioni

[1] Nella realtà la stipula di tale contratto è gestita da intermediari finanziari.

preferisca l'altro tipo (a tasso variabile). I contratti swap offrono la soluzione del problema.

Come si è visto, il contratto consiste nello scambio di un flusso cedolare generato da un coupon bond a tasso fisso con il flusso cedolare di un coupon bond indicizzato. Se lo scambio avviene a costo nullo, il relativo tasso fisso viene detto tasso swap. Questo è il caso dei contratti swap più utilizzati sul mercato di cui si è parlato. Il tasso swap è dunque il tasso della gamba fissa per cui il valore del contratto swap è nullo. In altri termini, il tasso swap è il tasso della gamba fissa che il mercato giudica equivalente al flusso di cedole indicizzate. Nel prossimo paragrafo vedremo quale proprietà soddisfa un tasso swap e ne discuteremo l'importanza.

Un altro tipo di IRS è l'*amortizing swap*. L'amortizing swap è un contratto che permette di cambiare la quota interesse di un piano d'ammortamento da fissa a variabile o viceversa.

Definizione 2.6.2. *Amortizing swap*
Supponiamo di avere un piano di debiti residui $\{D_0, \ldots, D_n\}$ *sullo scadenzario* $\{t_0, \ldots, t_n\}$*. Se denotiamo il tasso fisso* r*, il payer riceverà, a ogni data* t_k*, per* $k = 1, \ldots, n$*, l'importo:*

$$X_k = D_{k-1}[i(t_{k-1}, t_k) - r]\tau. \tag{7}$$

Il payer passa dunque da un piano a tasso variabile a uno a tasso fisso. Nel caso si voglia passare da un debito a tasso fisso a uno a tasso variabile, si riceverà l'opposto di (7). In presenza di uno spread σ*, si avrà*

$$X_k = D_{k-1}[i(t_{k-1}, t_k) + \sigma - r]\tau. \tag{8}$$

Analogamente al caso plain vanilla, viene definito tasso amortizing swap il tasso fisso per cui il valore del contratto è nullo.

La valutazione dei contratti definiti sopra si basa sul principio di non arbitraggio e sulla valutazione dei titoli a tasso fisso e dei titoli indicizzati sottostanti un contratto IRS. Distinguiamo due casi: la prima è la valutazione di un contratto prima o in coincidenza della data del suo inizio; la seconda è la valutazione di un contratto dopo la data del suo inizio. Il primo caso viene di solito applicato alla valutazione al momento della sottoscrizione. Il secondo riguarda la valutazione di un contratto in portafoglio ovvero di un contratto già sottoscritto durante la vita di questo. La logica è la stessa, sebbene i risultati siano leggermente diversi. La divisione è fatta meramente per motivi di chiarezza. Considereremo infine la valutazione di un amortizing swap.

Consideriamo la posizione di un payer in un contratto IRS semplice con data d'inizio t_0. L'istante di valutazione t può essere un istante generico o l'istante di stipula del contratto. Ci mettiamo ora nel caso $t \leq t_0$. In un mercato perfetto tale posizione è perfettamente equivalente a una posizione lunga su un titolo indicizzato e una posizione corta su un titolo a cedola fissa con tasso nominale annuo pari a r. Ovvero si è acquistato un titolo indicizzato $\mathcal{X}$ e venduto un titolo a tasso fisso Y con tasso nominale annuo pari a r. Per considerazioni di arbitraggio si ha che il valore di mercato $V(t, \mathrm{IRS})$ della posizione in t è:

$$V(t, \mathrm{IRS}) = V(t, \mathcal{X}) - V(t, Y). \tag{9}$$

La valutazione di un contratto swap semplice si effettua dunque a partire dalla valutazione dei coupon bond a tasso fisso e di quelli a tasso variabile. Più precisamente, da (2.4.1), punto (1), sappiamo che

$$V(t, \mathcal{X}) = Cv(t, t_0).$$

Il caso, di particolare interesse, $t = t_0$ è incluso dato che $v(t_0, t_0) = 1$. Inoltre si ha

$$V(t, Y) = Cr\tau \sum_{k=1}^{n} v(t, t_k) + Cv(t, t_n).$$

Così $V(t, \mathrm{IRS})$ in (9) è dato dal seguente

$$V(t, \mathrm{IRS}) = Cv(t, t_0) - [Cr\tau \sum_{k=1}^{n} v(t, t_k) + Cv(t, t_n)]. \tag{10}$$

Tale formula di valutazione è valida nel caso l'istante di valutazione sia precedente alla data d'inizio o coincida con questa. L'istante di valutazione però può essere sia l'istante della stipula o un istante successivo a questa. In questo secondo caso si sta valutando un contratto già sottoscritto ovvero già in portafoglio.

Come detto, sul mercato i contratti IRS più trattati vengono stipulati a costo nullo. Il tasso di interesse fisso di un contratto IRS semplice con scadenza j anni, che ha costo nullo al momento della stipula, è detto *tasso swap* a j anni e, seguendo le notazioni del testo (1), verrà denotato $\bar{p}_j$. Come nel caso di un FRA, per argomentazioni di arbitraggio, ciò vincola il tasso swap[2]. Ci mettiamo dunque nel caso in cui l'istante di

[2] Si noti infatti che un contratto IRS può essere visto come un portafoglio di FRA, precisamente di $\mathrm{FRA}_{t_{k-1} \times t_k}$, per $k = 1, \ldots, n$, tutti con tasso FRA pari a $\bar{p}_j$. Ciò non sorprende se si pensa che un contratto IRS in cui ci siano solo due date d'interesse, t_0 la data d'inizio e t_1 la scadenza, e in cui la stipula avvenga in una data t precedente a t_0, è un contratto $\mathrm{FRA}_{t_0 \times t_1}$.

valutazione coincide con la data di stipula del contratto. Poiché per definizione il prezzo del contratto swap è nullo al tasso swap, da (9) o (10) si ha

$$V(t, \mathcal{X}) = V(t, Y),$$

cioè

$$Cv(t, t_0) = C\bar{p}_j \tau \sum_{k=1}^{n} v(t, t_k) + Cv(t, t_n).$$

Il tasso swap $\bar{p}_j$ relativo a un contratto swap con data d'inizio t_0 e scadenza $t_n = t_0 + j$ anni soddisfa dunque la relazione:

$$\bar{p}_j \tau \sum_{k=1}^{n} v(t, t_k) + v(t, t_n) = v(t, t_0) \tag{11}$$

Il tasso $\bar{p}_j$ viene detto *tasso swap forward* nel caso che $t < t_0$, ovvero che la stipula avvenga in un istante precedente all'inizio del contratto. I tassi swap quotati sul mercato di cui si è parlato si riferiscono al caso in cui l'istante di stipula coincide con la data d'inizio del contratto, cioè $t = t_0$. In questo caso la (11) diventa:

$$\bar{p}_j \tau \sum_{k=1}^{n} v(t, t_k) + v(t, t_n) = 1 \tag{12}$$

Un tasso che soddisfa la relazione (12) si dice *tasso di parità* (si veda (1), par. 9.4.2). Il tasso swap è dunque un tasso di parità: è il tasso nominale annuo di un titolo che ha valore di mercato pari al suo valore facciale, cioè che quota alla pari. Questa è la proprietà che rende i tassi swap dei tassi di riferimento del mercato, come discuteremo in seguito. In particolare risulta

$$\bar{p}_j = \frac{1 - v(t, t_n)}{\tau \sum_{k=1}^{n} v(t, t_k)}$$

per il tasso swap e

$$\bar{p}_j = \frac{v(t, t_0) - v(t, t_n)}{\tau \sum_{k=1}^{n} v(t, t_k)}$$

per il tasso swap forward.

I tassi swap, in quanto tassi di parità, vengono utilizzati per misurare la struttura per scadenza dei tassi di interesse tramite il cosidetto metodo del *bootstrapping* descritto nel paragrafo (3). Questo è uno dei motivi per cui la struttura per scadenza dei tassi swap riveste una grande rilevanza operativa.

Esempio 2.6.3. *Si consideri un contratto forward, stipulato in* t*, con data di fixing* t_0 *e scadenza* t_1*, nozionale* C*, in simboli un* $FRA_{t_0 \times t_1}$*. Al momento della stipula il costo del contratto è nullo. Denotiamo il tasso forward stabilito nel contratto con* FRA*. Come detto nella nota (2), tale contratto è equivalente a un contratto swap con data d'inizio* t_0 *e scadenza* t_1*. Il valore del contratto* $V(t, FRA_{t_0 \times t_1})$ *in* t *si ottiene dalla (10):*

$$\begin{aligned} V(t, FRA_{t_0 \times t_1}) &= Cv(t, t_0) - [CFRA\tau v(t, t_1) + Cv(t, t_1)] \\ &= C[v(t, t_0) - v(t, t_1) - FRA\tau v(t, t_1)] \end{aligned}$$

Dato che all'istante di stipula il valore del contratto è nullo,

$$V(t, FRA_{t_0 \times t_1}) = 0,$$

si ricava

$$FRA = \frac{v(t, t_0) - v(t, t_1)}{\tau v(t, t_1)},$$

ovvero il tasso implicito già ottenuto con il Teorema dei prezzi impliciti. Il tasso forward FRA *è dunque un particolare caso di tasso swap forward.*

La valutazione fornita dalla (10) si applica anche alla seguente situazione. Consideriamo il contratto $FRA_{t_0 \times t_1}$ *visto sopra in un istante* s*, successivo alla data di stipula* t *e precedente a* t_0*. Il tasso forward è stato stabilito in* t *e il valore del contratto in* s *non sarà più nullo, in generale, perché sono cambiate le condizioni del mercato. Si ha che il valore del contratto* $V(s, FRA_{t_0 \times t_1})$ *in* s *è*

$$\begin{aligned} V(s, FRA_{t_0 \times t_1}) &= Cv(s, t_0) - [CFRA\tau v(s, t_1) + Cv(s, t_1)] \\ &= C[v(s, t_0) - v(s, t_1) - FRA\tau v(s, t_1)]. \end{aligned}$$

Come detto, $V(s, FRA_{t_0 \times t_1}) \neq 0$ *dato che*

$$\begin{aligned} FRA &= \frac{v(t, t_0) - v(t, t_1)}{\tau v(t, t_1)} \\ &\neq \frac{v(s, t_0) - v(s, t_1)}{\tau v(s, t_1)} \qquad \text{(in generale).} \end{aligned}$$

Esempio 2.6.4. *Un investitore ha in portafoglio un titolo a tasso fisso con tasso nominale annuo* r*, il quale risulta diverso dal tasso swap* $\bar{p}$ *con scadenza la vita a scadenza del titolo. Vuole passare a tasso variabile e vorrebbe entrare come payer in un IRS plain vanilla per scambiare con una controparte il flusso*

$$C[i(t_{k-1}, t_k) - r]\tau.$$

In questo caso il valore di mercato del contratto non è nullo e si può calcolare tramite la (9) o la (10). Un altro modo equivalente di procedere è quello di scrivere il flusso dello swap $C[i(t_{k-1}, t_k) - r]\tau$ *come*

$$C[i(t_{k-1}, t_k) - \bar{p}]\tau + C[\bar{p} - r]\tau \tag{13}$$

Scambiare il flusso corrispondente alla prima parte di (13) ha costo nullo in t *dato che il tasso variabile viene scambiato con il tasso swap, mentre la seconda parte rappresenta una cedola fissa. Si può dunque calcolare il valore del flusso cedolare dato da* $C[\bar{p} - r]\tau$*, noto in* t*, utilizzando la struttura dei tassi di mercato*

$$C[\bar{p} - r]\tau \sum_{k=1}^{n} v(t, t_k).$$

Tale valore verrà scambiato in t *tra le controparti. In tal caso si parla di* up-front*. Nel caso che* $r < \bar{p}$ *l'investitore dovrà pagare tale somma, altrimenti la riceverà. L'altra possibilità è quella di scrivere:*

$$C[i(t_{k-1}, t_k) - \bar{p}]\tau = C[i(t_{k-1}, t_k) + [r - \bar{p}] - r]\tau \tag{14}$$

Il termine $[r - \bar{p}]$ *gioca chiaramente il ruolo di uno spread (vedi la (6)). In tal caso le controparti possono decidere di non scambiarsi denaro in* t*; infatti il costo del flusso definito nella (14) è nullo. L'investitore riceverà dalla controparte il flusso*

$$C[i(t_{k-1}, t_k) + [r - \bar{p}]]\tau$$

e pagherà il flusso a tasso fisso

$$Cr\tau,$$

trasformando il suo titolo in un titolo a tasso variabile con spread $\sigma = [r - \bar{p}]$*. Tale spread è negativo se, al momento dell'accordo, il tasso swap è maggiore del tasso dell'investimento, altrimenti è positivo.*

Nel caso che $t_0 < t < t_1$, siamo nella situazione in cui si trova un investitore che è entrato in un contratto IRS in passato; lo detiene quindi in portafoglio. Vuole ora valutare il contratto che ha in portafoglio, ad esempio per motivi di bilancio o per rivendere il contratto. Il tasso fisso del contratto è stato stabilito al momento della stipula. Si noti che, in questo caso, anche se il costo iniziale per entrare nel contratto fosse stato nullo (cioè nel caso che il tasso fisso r fosse il tasso swap in vigore sul mercato all'istante della stipula), in generale il valore del contratto ora non sarà più nullo, date le mutate condizioni del mercato. Ha senso dunque, in un istante successivo alla stipula, chiedersi quanto vale la propria posizione. In questo caso si ha che $t_0 < t \leq t_1$. La data t_0 si può pensare come la data in cui è avvenuto l'ultimo scambio e in cui è stato fissato l'importo del prossimo, da liquidare in t_1. La somma da scambiare in t_1 è nota in t, pari a

$$C[i(t_0, t_1) - r]\tau.$$

Consideriamo anche qui la posizione di un payer. La sua posizione è ancora equivalente ad una posizione lunga su un titolo indicizzato $\mathcal{X}$ e una posizione corta su un titolo a tasso fisso Y. Il valore di mercato della posizione si può ancora calcolare come

$$V(t, \mathrm{IRS}) = V(t, \mathcal{X}) - V(t, Y).$$

La differenza ora è che la prima cedola del titolo indicizzato $\mathcal{X}$ è nota, pari a $Ci(t_0, t_1)\tau$ e pertanto, da (2.4.1), punto (2),

$$V(t, \mathcal{X}) = (C + Ci(t_0, t_1)\tau)v(t, t_1).$$

Così, l'analogo della (10) è

$$(15) \quad V(t, \mathrm{IRS}) = C(1+i(t_0, t_1)\tau)v(t, t_1) - [Cr\tau \sum_{k=1}^{n} v(t, t_k) + Cv(t, t_n)].$$

Come detto, tale valore non sarà, in generale, nullo e può essere positivo o negativo. Un valore positivo vuol dire che il contratto potrebbe essere venduto generando un guadagno, negativo che per uscire dal contratto bisogna pagare. Il lettore attento avrà notato che, nel caso si valuti il contratto nell'istante di scambio, $t = t_1$, la (15) appare formalmente identica alla (10) nel caso $t = t_0$. La differenza sostanziale sta nel fatto che, se all'istante della stipula si può negoziare il tasso fisso in modo che il contratto abbia costo nullo, viene cioè fissato il tasso swap, nel caso in esame il tasso è già stato stabilito e non si può modificare. La (15) darà comunque valori diversi da zero, in generale.

2.7. **Amortizing swap.** Nel caso dell'amortizing swap tratteremo solamente il caso in cui l'istante di valutazione t coincida con la data d'inizio del contratto, $t = t_0$. Il lettore intraprendente può analizzare i casi $t < t_0$ e $t_0 < t \leq t_1$.

Consideriamo l'amortizing swap definito in (2.6.2). Sia $\{C_1, \ldots, C_n\}$ il flusso di quote capitali sullo scadenzario $\{t_1, \ldots, t_n\}$. Analogamente al caso del plain vanilla, il valore in $t = t_0$ del mutuo indicizzato è $V(t) = D_0$, mentre quello del mutuo a tasso fisso è

$$\sum_{k=1}^{n} C_k v(t, t_k) + r\tau \sum_{k=1}^{n} D_{k-1} v(t, t_k).$$

Il valore dell'amortizing swap si ottiene come differenza.

Come detto, il tasso amortizing swap è quel tasso per cui il valore del contratto sia nullo. Il tasso amortizing swap $\bar{p}_a$ soddisfa dunque una relazione di parità analoga a (12):

$$D_0 = \sum_{k=1}^{n} C_k v(t, t_k) + \bar{p}_a \tau \sum_{k=1}^{n} D_{k-1} v(t, t_k), \tag{16}$$

da cui

$$\bar{p}_a = \frac{D_0 - \sum_{k=1}^{n} C_k v(t, t_k)}{\tau \sum_{k=1}^{n} D_{k-1} v(t, t_k)}.$$

Si noti che il tasso amortizing swap dipende non solo dalla scadenza del mutuo e dalla frequenza delle rate, ma anche dal piano di rimborso. Ad esempio, nel caso di preammortamento in cui $D_k = D_0$ per $k = 0, 1, \ldots, n-1$ e $D_n = 0$, si ottiene un tasso swap plain vanilla.

Esempio 2.7.1. *Un ente locale è indebitato a tasso fisso con la Cassa Depositi e Prestiti al tasso nominale annuo r. Si supponga che r sia diverso dal tasso amortizing swap $\bar{p}_a$ corrispondente alla struttura del piano d'ammortamento. Ad esempio quello che accade nei primi anni del 2000 è che $r > \bar{p}_a$. Considerato l'abbassamento dei tassi, l'ente decide di passare ad un debito a tasso variabile e si rivolge ad un istituto bancario per ristrutturare il suo debito. L'istituto gli propone di entrare come receiver in un amortizing IRS per scambiare il flusso*

$$D_{k-1}[r - i(t_{k-1}, t_k)]\tau.$$

In questo caso il valore di mercato del contratto non è nullo. Infatti il flusso si può scrivere come

$$D_{k-1}[r - i(t_{k-1}, t_k)]\tau = D_{k-1}[\bar{p}_a - i(t_{k-1}, t_k)]\tau + D_{k-1}[r - \bar{p}_a]\tau, \tag{17}$$

per $k = 1, \ldots, n$. Scambiare il flusso relativo alla prima parte di (17) ha costo nullo in t, mentre la seconda parte rappresenta un flusso a tasso fisso. Come nell'esempio (2.6.4), una possibilità è quella di calcolare il valore di mercato del flusso

$$D_{k-1}[r - \bar{p}_a]\tau,$$

noto in t. Tale valore verrà scambiato in t tra le controparti. Nel caso che $r > \bar{p}_a$ l'ente dovrà pagare tale somma, altrimenti la riceverà. Spesso nella pratica si preferisce non scambiare denaro al momento della stipula. Si scrive dunque

$$D_{k-1}[\bar{p}_a - i(t_{k-1}, t_k)]\tau = D_{k-1}[r - (i(t_{k-1}, t_k) + [r - \bar{p}_a])]\tau \tag{18}$$

Il termine $[r - \bar{p}_a]$ gioca di nuovo il ruolo di uno spread (si veda la (8)). In tal caso le controparti possono decidere di non scambiarsi denaro in *t dato che il costo del flusso definito nella (18) è nullo. L'ente pagherà alla controparte il flusso*

$$D_{k-1}[i(t_{k-1}, t_k) + [r - \bar{p}_a]]\tau,$$

trasformando il suo mutuo in un mutuo a tasso variabile con spread $\sigma = [r - \bar{p}_a]$. *Tale spread* σ *sarà positivo se, al momento dell'accordo, il tasso del finanziamento è maggiore del tasso amortizing swap, altrimenti sarà negativo.*

Nella pratica operativa avviene spesso che l'istituto bancario che propone all'ente la ristrutturazione aggiunga a σ *un ulteriore spread come commissione che dipende dall'affidabilità creditizia dell'ente.*

2.8. **Tassi swap come tassi di riferimento.** I tassi swap sono i tassi di riferimento per i titoli a cedola fissa. Ciò è di nuovo grazie alla proprietà (12). Un ente che voglia emettere un titolo a cedola fissa con una certa scadenza lo emetterà con tasso nominale annuo pari al tasso swap dell'IRS plain vanilla della stessa scadenza e come valore di riferimento per il prezzo considererà il valore di parità. In tal modo si assicura che il prezzo di emissione del titolo sia in linea con il valore di mercato. Potrà poi aggiungere uno spread che dipenderà prevalentemente dalla sua affidabilità come emmittente.

I tassi swap sono altresì i tassi di riferimento per i mutui a tasso fisso (si veda (3)). Un istituto bancario che emette un mutuo a tasso fisso fa riferimento al tasso swap della scadenza desiderata. In questa maniera si assicura che il valore di mercato del mutuo sia, *circa*, pari al capitale prestato. Circa perché, a essere precisi, si dovrebbe far riferimento al tasso amortizing swap corrispondente alle caratteristiche del mutuo, come si vede dalla (16). A tale tasso gli istituti aggiungono uno spread che varia tra l'1% e il 3% e che rappresenta un guadagno, dato che in questo modo il valore di mercato del mutuo sarà superiore al prestito erogato. Lo spread rappresenta altresì un premio per il rischio d'insolvenza e, in quanto tale, dipende dall'affidabilità della controparte.

Per approfondimenti e applicazioni sui titoli indicizzati e i contratti swap si veda la cartella excel *ttv.xls* disponibile su (4).

3. Il bootstrap dai tassi swap ai tassi a pronti

I tassi swap plain vanilla sono i dati di mercato più utilizzati per la misurazione della curva zero coupon, ovvero della struttura a termine dei tassi di mercato, per scadenze superiori ad un anno o ai due anni. Supponiamo che la periodicità degli IRS in considerazione sia annuale, ovvero che $\tau = 1$ anno. Così $t_1 = 1, \ldots, t_n = n$. Data una struttura di tassi swap osservati sul mercato all'istante t, $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n$, si possono ricavare i fattori di sconto $v(t, t_1), \ldots, v(t, t_n)$. Per far ciò si deve risolvere un sistema di n equazioni in n incognite date dalle relazioni (12), una per ciascuna scadenza:

$$\begin{array}{ll}
\bar{p}_1 v(t,t_1) + v(t,t_1) & = 1 \\
\bar{p}_2 [v(t,t_1) + v(t,t_2)] + v(t,t_2) & = 1 \\
\vdots & \\
\bar{p}_n [v(t,t_1) + v(t,t_2) + \ldots + v(t,t_n)] + v(t,t_n) & = 1
\end{array}$$

Raccogliendo opportunamente si ha

$$\begin{array}{ll}
(\bar{p}_1 + 1) v(t,t_1) & = 1 \\
\bar{p}_2 v(t,t_1) + (\bar{p}_2 + 1) v(t,t_2) & = 1 \\
\vdots & \\
\bar{p}_n [v(t,t_1) + v(t,t_2) + \ldots v(t,t_{n-1})] + (\bar{p}_n + 1) v(t,t_n) & = 1
\end{array}$$

Risolvendo tale sistema triangolare si ottiene:

$$\begin{aligned}
v(t,t_1) &= \frac{1}{1+\bar{p}_1} \\
v(t,t_2) &= \frac{1 - \bar{p}_2 v(t,t_1)}{1+\bar{p}_2} \\
&\vdots \\
v(t,t_m) &= \frac{1 - \bar{p}_m \sum_{k=1}^{m-1} v(t,t_k)}{1+\bar{p}_m} \\
&\vdots \\
v(t,t_n) &= \frac{1 - \bar{p}_n \sum_{k=1}^{n-1} v(t,t_k)}{1+\bar{p}_n}.
\end{aligned}$$

Come si vede i prezzi $v(t, t_k)$, nonostante appaiano nei secondi membri delle uguaglianze, possono essere effettivamente calcolati in maniera ricorsiva. Dai prezzi a pronti si possono ricavare i rispettivi tassi o le yield to maturity come

$$\begin{aligned}
i(t,t_k) &= (1/v(t,t_k))^{\frac{1}{t_k - t}} - 1, \\
\delta(t,t_k) &= -\frac{\log v(t,t_k)}{t_k - t}.
\end{aligned}$$

Si noti che $i(t, t_1) = \bar{p}_1$, ovvero il tasso a pronti relativo alla prima scadenza è uguale al corrispondente tasso swap.

Come visto i tassi swap di mercato hanno periodicità semestrale, ovvero $\tau = 0.5$. La procedura sopra descritta non è dunque completamente corretta. Il punto è che, per portare avanti la procedura, servirebbero tassi swap per scadenze 1 anno e mezzo, 2 anni e mezzo e così via. Tali tassi non sono però quotati. Una possibilità potrebbe essere quella di ricorrere all'interpolazione, ad esempio lineare, dei tassi swap in maniera da avere tassi per scadenze intermedie. Si potrebbe poi procedere come sopra.

Per un implementazione della procedura vista sopra si veda la cartella excel *curvatassi.xls* disponibile su (4).

Riferimenti

(1) G. Castellani, M. De Felice, F. Moriconi, Manuale di finanza, vol I. Tassi d'interesse. Mutui e obbligazioni, 2005, il Mulino.
(2) A. Consiglio (2003), Matematica Finanziaria (dispense), http://www.unipa.it/consiglio.
(3) http://www.casa24.ilsole24ore.com
(4) http://www.unipg.it/angelini/matfin.htm

Sezione di Finanza Matematica, Dipartimento di Economia, Università di Perugia

E-mail address: angelini@unipg.it; herzel@unipg.it