ALCUNI COMPLEMENTI TEORICI

Tra le classi di funzioni integrabili secondo Riemann, oltre alle funzioni continue (Paragrafo 66 del libro di testo), ci sono le funzioni monotone (limitate):

Teorema *Ogni funzione monotona e limitata nell'intervallo* $[a, b]$ *é integrabile in* $[a, b]$.

Dimostrazione. Supponiamo per esempio che f sia crescente in $[a, b]$ e sia $P = \{x_0 = a, x_1, \dots x_n = b\}$ una partizione di $[a, b]$ in n intervalli di uguale ampiezza $(b - a)/n$, cioé $x_k - x_{k-1} = (b - a)/n$, per $k = 1, \dots n$. Allora, indicando con $s(P), S(P)$ le somme inferiori e superiori della f rispetto a P, si ottiene facilmente:

$$S(P) - s(P) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)].$$

Fissato allora $\varepsilon > 0$, basterá scegliere n cosí grande che

$$[f(b) - f(a)](b - a)/n < \varepsilon$$

ed applicare il criterio di integrabilitá (pagina 206 del libro di testo).

Il teorema precedente ci permette anche di portare esempi di funzioni discontinue che sono integrabili. Piú in generale ogni funzione di tipo "a gradino" costituisce un facile esempio di tale funzione.

Un esempio di funzione non integrabile, per la quale cioé $s(f) < S(f)$, é la seguente:
sia $f : [0, 2] \to I\!R$ cosí definita:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in I\!R \setminus Q \\ 2, & \text{se } x \in Q \end{cases}$$

dove Q é l'insieme dei numeri razionali. Allora qualunque sia la partizione P dell'intervallo $[0, 2]$ risulta $s(P) = 2$ mentre $S(P) = 4$. Pertanto le classi $\{s(P)\}, \{S(P)\}$ sono separate ed ogni punto dell'intervallo $]2, 4[$ é elemento di separazione. Quindi f non puó essere integrabile.
Le funzioni del tipo descritto si chiamano "funzioni di Dirichlet".

ALCUNI METODI DI INTEGRAZIONE

Integrazione per sostituzione: sostituzioni particolari.

1. *Funzioni razionali di* e^x
   In tal caso si pone $e^x = t$, da cui $x = \log t,\ dx = dt/t$. Esempio:
$$\int \frac{1}{\cosh x} dx = 2\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} dx$$
$$= 2\int \frac{1}{t + t^{-1}} \frac{1}{t} dt = 2\int \frac{1}{t^2+1} dt$$
$$= 2\arctan t + c = 2\arctan(e^x) + c.$$

2. *Funzioni del tipo* $f(\sin x)\cos x$ *o* $f(\cos x)\sin x$
   In tal caso si pone:
$$\sin x = t,\ \ \cos x dx = dt, \quad \text{per l'integrale} \int f(\sin x)\cos x dx$$
$$\cos x = t,\ \ -\sin x dx = dt, \quad \text{per l'integrale} \int f(\cos x)\sin x dx$$

   Esempio:
$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin x[1-\cos^2 x]\cos^2 x dx$$
   e allora basta porre $f(t) = (1-t^2)t^2$ e fare la sostituzione $\cos x = t$ ed ottenere:
$$\int \sin^3 x\cos^2 x dx = \int \sin x[1-\cos^2 x]\cos^2 x dx = -\int (1-t^2)t^2 dt$$
$$\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{\arccos^3 x}{3} - \frac{\arccos^5 x}{5} + c$$

3. *Funzioni razionali di* $\sin x$ *e* $\cos x$.
   In tal caso si pone $t = tan\frac{x}{2}$, da cui $x = 2\arctan t,\ dx = \frac{2}{t^2+1}dt$. Usando questa sostituzione si ottiene, dalle note relazioni trigonometriche,
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{t^2+1}.$$

Esempio:

$$\int \frac{\sin x}{3+\sin x}dx = \int \left(1 - \frac{3}{3+\sin x}\right)dx = x - 3\int \frac{1}{3+\sin x}dx.$$

Ora all'ultimo integrale applichiamo la sostituzione suddetta. Si ha:

$$\int \frac{1}{3+\sin x}dx = \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}dt = 2\int \frac{1}{3t^2+2t+3}dt,$$

che é una funzione razionale e l'integrale si calcola con i metodi visti in precedenza. Il risultato finale é:

$$\int \frac{\sin x}{3+\sin x}dx = x - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}[\tan(x/2)+1/3]\right) + c.$$

4. *Funzioni razionali di* $x, x^{n_1/m_1}, x^{n_2/m_2}, \ldots$.
   In tal caso si pone $x = t^n$, dove n é il minimo comune multiplo di $m_1, m_2, \ldots$... Si ha quindi $dx = nt^{n-1}dt$, ottenendo una funzione razionale di t.
   Esempio:

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{x(2x^{1/3}+3)}dx.$$

   La funzione integranda é funzione razionale di $x, x^{1/2}, x^{1/3}$. Poniamo allora $x = t^6$, da cui $dx = 6t^5dt$. Si ha allora:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t^3}{2t^2+3}\frac{6t^5}{t^6}dt = \int \frac{6t^2}{2t^2+3}dt \\ &= \int \left(3 - \frac{9}{2t^2+3}\right)dt = 3t - 3\sqrt{3/2}\arctan(\sqrt{2/3}t) + c \\ &= 3x^{1/6} - 3\sqrt{3/2}\arctan(\sqrt{2/3}x^{1/6}) + c. \end{aligned}$$

5. *Formula di Hermite per il calcolo degli integrali delle funzioni razionali.*
   Sussiste la seguente formula di decomposizione di Hermite: consideriamo una funzione razionale del tipo $f(x) = R(x)/Q(x)$, dove R, Q sono

polinomi e il grado di Q é maggiore del grado di R. Supponiamo che Q abbia grado n :

$$Q(s) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

Supponiamo che Q possieda r soluzioni reali α_1 con molteplicitá μ_1, α_2 con molteplicitá μ_2, e cosí via α_r con molteplicitá μ_r. Supponiamo poi che Q abbia anche un certo numero s di radici complesse coniugate, individuate dai trinomi $x^2+p_1x+q_1$, con molteplicitá ν_1, $x^2+p_2x+q_2$ con molteplicitá ν_2, e cosí via, $x^2+p_sx+q_s$, con molteplicitá ν_s. Allora per il teorema di Ruffini possiamo scrivere

$$Q(x) = a_0(x-\alpha_1)^{\mu_1}\cdots(x-\alpha_r)^{\mu_r}\cdots(x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{\nu_s}.$$

Sussiste la decomposizione:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r}\frac{A_i}{x-\alpha_i} + \sum_{j=1}^{s}\frac{B_jx+C_j}{x^2+p_jx+q_j} +$$
$$+\frac{d}{dx}\left[\frac{T(x)}{(x-\alpha_1)^{\mu_1-1}\cdots(x-\alpha_r)^{\mu_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1-1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{\nu_s-1}}\right].$$

dove A_i, B_j, C_j sono opportune costanti univocamente determinate e $T(x)$ é un polinimio a coefficienti reali di grado al piú inferiore di uno rispetto al grado del suo denominatore.
Esempio: Calcoliamo l'integrale:

$$\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}dx.$$

In tal caso risulta $Q(x) = (x^2-1)^2$ che possiede le radici $x = 1$, $x = -1$ entrambe con molteplicitá due. Abbiamo allora:

$$\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{d}{dx}\left[\frac{b_0x+b_1}{(x-1)(x+1)}\right]$$
$$= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{b_0}{(x-1)(x+1)}$$
$$-\frac{b_0x+b_1}{(x-1)^2(x+1)} - \frac{b_0x+b_1}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Da questa moltiplicando ambo i membri per $(x-1)^2(x+1)^2$ utilizzando il principio di identitá dei polinomi si ottiene: $A_1 = A_2 = 0$, $b_0 = -1$, $b_1 = 0$. Risulta allora:

$$\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = \frac{d}{dx}\frac{-x}{(x-1)(x+1)}$$

e quindi integrando,

$$\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}dx = -\frac{-x}{(x-1)(x+1)} + k.$$

Calcoliamo ora l'integrale

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+1)^2}dx.$$

In tal caso $Q(x) = x(x^2+1)^2$, che possiede la radice $x = 0$, semplice (cioé con molteplicitá 1) e le radici complesse coniugate $x = \pm i$ con molteplicitá due. Allora:

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{b_0 x + b_1}{x^2+1}.$$

Procedendo come prima, per calcolare i coefficienti, si ottiene la decomposizione:

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-2x+1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{x+1}{x^2+1}.$$

Completare il calcolo dell'integrale.